

## РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК КРУГЛОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА С МНОГОСЛОЙНЫМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

<sup>1</sup>Малов Э.Э., <sup>1</sup>Мительман Ю.Е.

<sup>1</sup> ФГАОУ ВПО Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина ул. Мира, 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия тел.: (343) 3744886, e-mail: [e.e.malov@urfu.ru](mailto:e.e.malov@urfu.ru)

**Аннотация:** Настоящая статья посвящена разработке математической модели и построению алгоритма для расчета постоянной распространения круглого волновода с металлическими стенками с поперечно неоднородным диэлектрическим заполнением. В основе математической модели лежат аппарат функций Грина и математический аппарат теории длинных линий для анализа многослойных структур. В статье описаны решения, использованные для создания алгоритмов, позволяющих применить описанную математическую модель для получения частотных зависимостей постоянной распространения.

**Ключевые слова:** круглый волновод, многослойное диэлектрическое заполнение, метод функций Грина, постоянная распространения.

## DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL FOR CALCULATION OF CHARACTERISTICS OF THE CIRCULAR METAL WAVEGUIDE WITH MULTILAYER DIELECTRIC FILLING

<sup>1</sup>Malov E.E., <sup>1</sup>Mitelman Yu.E.

<sup>1</sup> Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Professional Education "Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin" 19, Mira Str., Yekaterinburg, 620002, Russian Federation Ph.: (343) 3744886, e-mail: [e.e.malov@urfu.ru](mailto:e.e.malov@urfu.ru)

**Abstract:** This article is dedicated to the development of mathematical model and building of an algorithm for calculation of propagation constant of circular metal waveguide with multilayer dielectric filling. Mathematical model is based on Green's function methods and methods of circuits theory for analysis of multilayered structures. Ideas and solutions, which were used for algorithms created for applying of described mathematical model for obtaining of frequency dependences of propagation constant are described.

**Key words:** circular waveguide, dielectric lining, Green's function method, propagation constant.

### Введение

Для расчета электродинамических характеристик многослойной цилиндрической структуры необходимо составить дисперсионные уравнения. Обычно для этого используется метод сшивания полей и его модификация в виде метода частичных областей, в котором частные решения волновых уравнений в исследуемой структуре

определяются граничными условиями на границах однородных слоев. При использовании этих методов решения дифференциальных уравнений получают систему линейных алгебраических уравнений. Но следует отметить, что при увеличении количества слоев количество уравнений увеличивается, следовательно, увеличивается и матрица, из которой определяется решение этой системы линейных алгебраических уравнений. Чем больше эта матрица, тем она становится более плохо обусловленной, что затрудняет точный и быстрый поиск решения.

В связи со сложностями при построении модели с большим количеством слоев, и желании иметь модель для неограниченного количества слоев был выбран универсальный электродинамический метод анализа многослойных цилиндрических направляющих систем, основанный на использовании аппарата функций Грина и позволяющий использовать математический аппарат теории длинных линий для анализа многослойных структур. Преимущества этого метода описаны в работах [1-5].

### **Цель исследования**

Используя этот метод, возможно анализировать круглый волновод, коаксиальную линию, диэлектрический волновод и однопроводную линию с потерями и без них с необходимостью замены в алгоритмах только лишь граничных условий на внутренней и внешней областях в форме конечных сопротивлений и проводимостей эквивалентных линий при переходе от одной линии к другой, что облегчает исследование и проектирование широкого класса направляющих структур. В основе этого метода лежат модель эквивалентных радиальных линий передачи, методы теории цепей СВЧ и уравнения поперечного резонанса.

### **Материалы и методы исследования**

В рамках этой статьи будет исследован только круглый металлический волновод. И для демонстрации эффективности метода выведем соотношения для расчета волновых чисел в волноводе с N-слойным заполнением (рисунок 1).

В качестве опорного сечения при выводе искомых соотношений можно использовать любое радиальное сечение. Но для простоты используем сечение с левой стороны от внутренней границы  $r_p = r_1^-$ .

Концевые сопротивления и проводимости для  $H$ - и  $E$ -линий для рассматриваемого случая имеют вид:

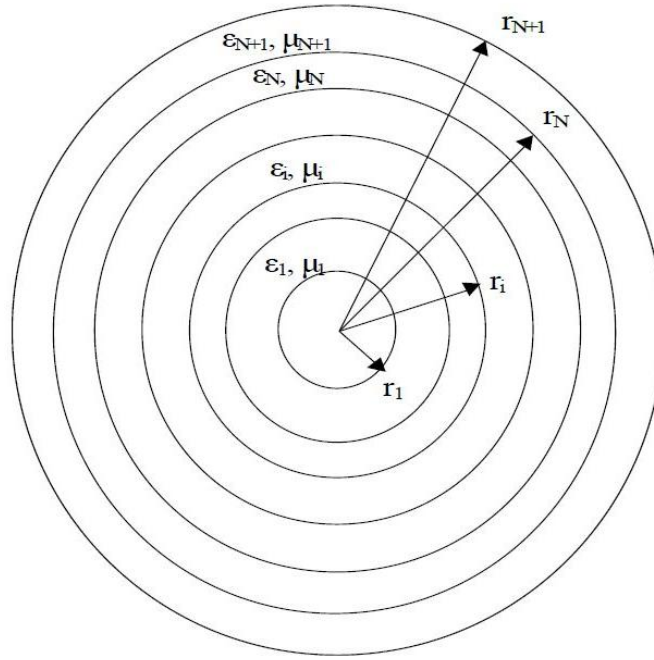


Рисунок 1. Поперечное сечение радиально неоднородной цилиндрической структуры.

$$\vec{Z}_{1H}^- = -jZ_0 \frac{\mu_1}{\beta_1} k_0 r_1 \frac{J'_m(\beta_1 k_0 r_1)}{J_m(\beta_1 k_0 r_1)}, \quad (1)$$

$$\vec{Y}_{1E}^- = -jY_0 \frac{\varepsilon_1}{\beta_1} k_0 r_1 \frac{J'_m(\beta_1 k_0 r_1)}{J_m(\beta_1 k_0 r_1)}, \quad (2)$$

$$\vec{Z}_{(N-1)H}^+ = jZ_0 \frac{\mu_N}{\beta_N} k_0 r_{N-1} \frac{S_{1m}(\beta_N k_0 r_{N-1}, \beta_N k_0 r_N)}{C_{2m}(\beta_N k_0 r_{N-1}, \beta_N k_0 r_N)}, \quad (3)$$

$$\vec{Y}_{(N-1)E}^+ = -jY_0 \frac{\varepsilon_N}{\beta_N} k_0 r_{N-1} \frac{C_{1m}(\beta_N k_0 r_{N-1}, \beta_N k_0 r_N)}{S_{2m}(\beta_N k_0 r_{N-1}, \beta_N k_0 r_N)}, \quad (4)$$

где  $\beta_i$  – поперечная постоянная распространения в  $i$ -м слое, нормированная к волновому числу свободного пространства  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ ;

$$\beta_i = \sqrt{\varepsilon_i \mu_i - \tilde{h}^2} \quad (5)$$

$\tilde{h} = \frac{h}{k_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_L} = \frac{c}{v_{\phi L}}$  – продольная постоянная распространения в волноводе, нормированная к волновому числу свободного пространства;

$\lambda_L$  – длина волны в линии передачи;

$v_{\phi L}$  – фазовая скорость волны в линии передачи;

$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi \text{ Ом}$  – характеристическое сопротивление свободного пространства;

$Y_0 = 1/Z_0$  – характеристическая проводимость свободного пространства.

Выражения для сопротивлений и проводимостей «вправо» от опорной точки можно записать таким образом:

$$\vec{Z}_{1H}^- = \frac{\tilde{R}_{34} + \tilde{R}_{33}\vec{Z}_{(N-1)H}^+ + (\tilde{R}_{32}\vec{Y}_{(N-1)E}^+ + \tilde{R}_{31})\vec{Z}_{NEH}^c}{\tilde{R}_{44} + \tilde{R}_{43}\vec{Z}_{(N-1)H}^+ + (\tilde{R}_{42}\vec{Y}_{(N-1)E}^+ + \tilde{R}_{41})\vec{Z}_{NEH}^c}, \quad (6)$$

$$\vec{Y}_{1E}^- = \frac{\tilde{R}_{21} + \tilde{R}_{22}\vec{Y}_{(N-1)H}^+ + (\tilde{R}_{23}\vec{Z}_{(N-1)E}^+ + \tilde{R}_{24})\vec{Y}_{NHE}^c}{\tilde{R}_{11} + \tilde{R}_{12}\vec{Y}_{(N-1)H}^+ + (\tilde{R}_{13}\vec{Z}_{(N-1)E}^+ + \tilde{R}_{14})\vec{Y}_{NHE}^c}, \quad (7)$$

где

$$\vec{Z}_{NEH}^c = -\frac{\vec{Y}_{1E}^-\tilde{R}_{14} + \vec{Y}_{1E}^-\vec{Z}_{(N-1)H}^+\tilde{R}_{13} + \tilde{R}_{24} + \tilde{R}_{23}\vec{Z}_{(N-1)H}^+}{\tilde{R}_{21} + \tilde{R}_{22}\vec{Y}_{(N-1)E}^+ + \vec{Y}_{1E}^-(\tilde{R}_{12}\vec{Y}_{(N-1)E}^+ + \tilde{R}_{11})} - \text{сопротивление связи};$$

$$\vec{Y}_{NHE}^c = -\frac{\vec{Z}_{1H}^-\tilde{R}_{41} + \vec{Z}_{1H}^-\vec{Y}_{(N-1)E}^+\tilde{R}_{24} + \tilde{R}_{31} + \tilde{R}_{32}\vec{Y}_{(N-1)E}^+}{\tilde{R}_{34} + \tilde{R}_{33}\vec{Z}_{(N-1)H}^+ + \vec{Z}_{1H}^-(\tilde{R}_{43}\vec{Z}_{(N-1)H}^+ + \tilde{R}_{44})} - \text{проводимость связи};$$

$$[\tilde{R}] = [\Gamma]^1 \prod_{p=2}^{(N-1)} [\vec{C}]^p [\Gamma]^p - \text{матрица передачи через слои и границы};$$

$$[\Gamma]^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -N_p \\ N_p & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{матрица передачи } p - \text{ой границы};$$

$$N_p = m\tilde{h}\left(\frac{1}{\beta_p^2} - \frac{1}{\beta_{p+1}^2}\right);$$

$$[\vec{C}]^p = \begin{pmatrix} [\vec{C}_E]^p & [0] \\ [0] & [\vec{C}_H]^p \end{pmatrix} - \text{матрица передачи } p - \text{го слоя};$$

$$[\vec{C}_E]^2 = \begin{pmatrix} C_{2m}(\beta_p k_0 r_{p-1}, \beta_p k_0 r_p) & jZ_0 \frac{\beta_p}{\varepsilon_p} \frac{1}{k_0 r_p} S_{2m}(\beta_p k_0 r_{p-1}, \beta_p k_0 r_p) \\ jY_0 \frac{\varepsilon_p}{\beta_p} k_0 r_{p-1} S_{1m}(\beta_p k_0 r_{p-1}, \beta_p k_0 r_p) & \frac{r_{p-1}}{r_p} C_{1m}(\beta_p k_0 r_{p-1}, \beta_p k_0 r_p) \end{pmatrix}$$

– матрица передачи среднего слоя  $E$  – линии;

$$[\vec{C}_H]^p = \begin{pmatrix} \frac{r_{p-1}}{r_p} C_{1m}(\beta_p k_0 r_{p-1}, \beta_p k_0 r_p) & jZ_0 \frac{\mu_p}{\beta_p} k_0 r_{p-1} S_{1m}(\beta_p k_0 r_{p-1}, \beta_p k_0 r_p) \\ jY_0 \frac{\beta_p}{\mu_p} \frac{1}{k_0 r_p} S_{2m}(\beta_p k_0 r_{p-1}, \beta_p k_0 r_p) & C_{2m}(\beta_p k_0 r_{p-1}, \beta_p k_0 r_p) \end{pmatrix}$$

– матрица передачи среднего слоя  $H$  – линии;

$C_{2m}, S_{2m}, C_{1m}, S_{1m}$ , - фундаментальные функции Коши уравнений Бесселя:

$$C_{1m}(x, y) = \frac{y\pi}{2} [J_m(y)N'_m(x) - N_m(y)J'_m(x)],$$

$$C_{2m}(x, y) = \frac{y\pi}{2} [N'_m(y)J_m(x) - J'_m(y)N_m(x)],$$

$$S_{1m}(x, y) = \frac{y\pi}{2} [N'_m(y)J'_m(x) - J'_m(y)N'_m(x)],$$

$$S_{2m}(x, y) = \frac{y\pi}{2} [N_m(y)J_m(x) - J_m(y)N_m(x)],$$

при этом производная функции Бесселя любого рода и порядка вычисляется по формуле:

$$J'_m(x) = \frac{m}{x}J_m(x) - J_{m+1}(x), \quad (8)$$

где  $m$  – порядок функции Бесселя.

Нормированные постоянные распространения определяются из условий поперечного резонанса [63]:

$$\tilde{Z}_{1H}^-(\tilde{h}) + \tilde{Z}_{1H}^-(\tilde{h}) = 0, \quad (9)$$

$$\tilde{Y}_{1E}^-(\tilde{h}) + \tilde{Y}_{1E}^-(\tilde{h}) = 0. \quad (10)$$

Первое условие является условием распространения для Н-волн, второе – для Е-волн. Для гибридных волн условия выполняются одновременно.

При численном решении уравнений (9) и (10), в отношениях  $\frac{C_{1m}}{S_{2m}}$  и  $\frac{S_{1m}}{C_{2m}}$  целесообразно

выразить функции  $C_{1m}$ ,  $C_{2m}$ ,  $S_{1m}$ ,  $S_{2m}$  через функции Бесселя первого и третьего рода (функции Ганкеля 2-го типа). Такие манипуляции необходимы, т.к. функции  $C_{1m}$ ,  $C_{2m}$ ,  $S_{1m}$ ,  $S_{2m}$  при определенных значениях аргументов принимают очень маленькие значения, и при

расчете отношений  $\frac{C_{1m}}{S_{2m}}$  и  $\frac{S_{1m}}{C_{2m}}$  возникает заметная погрешность. Для устранения этой

погрешности при численном моделировании используются следующие выражения:

$$C_{1m}(x, y) = \frac{H_m^{(2)'}(x)}{H_m^{(2)}(x)} - \frac{J'_m(x)}{J_m(x)} \frac{\frac{H_m^{(2)}(y)}{J_m(y)}}{\frac{H_m^{(2)}(x)}{J_m(x)}}, \quad (11)$$

$$C_{2m}(x, y) = \frac{H_m^{(2)'}(y)}{H_m^{(2)}(y)} \frac{\frac{H_m^{(2)}(y)}{J_m(y)}}{\frac{H_m^{(2)}(x)}{J_m(x)}} - \frac{J'_m(y)}{J_m(y)}, \quad (12)$$

$$S_{1m}(x, y) = \frac{H_m^{(2)'}(y)}{H_m^{(2)}(y)} \frac{J'_m(x)}{J_m(x)} \frac{\frac{H_m^{(2)}(y)}{J_m(y)}}{\frac{H_m^{(2)}(x)}{J_m(x)}} - \frac{J'_m(y)}{J_m(y)} \frac{H_m^{(2)'}(x)}{H_m^{(2)}(x)}, \quad (13)$$

$$S_{2m}(x, y) = \frac{\frac{H_m^{(2)}(y)}{J_m(y)}}{\frac{H_m^{(2)}(x)}{J_m(x)}} - 1. \quad (14)$$

Необходимо отметить, что выражения (11)-(14) справедливы только при расчете отношений фундаментальных функций Коши, и нельзя их применять при расчете самих функций, так как при выводе этих выражений, в целях упрощения были сокращены все коэффициенты.

Для получения характеристик металлического волновода с многослойным заполнением необходимо, решить уравнения (9) и (10), которые являются сложными трансцендентными уравнениями. Соответственно мы можем решать такие уравнения только численным методом. В левой части условий поперечного резонанса находится функция, зависящая от параметров слоев, азимутального индекса волны  $m$ , постоянной распространения в линии и частоты.

### Результаты исследования и их обсуждение

Для оценки характеристик волновода с многослойным заполнением необходимо построить зависимость  $\beta_z(f)$  постоянной распространения от частоты. Интерес для анализа представляют волна основного типа и первые несколько высших типов волн.

При решении уравнений (9) и (10) численным методом мы варьируем двумя параметрами – частотой и продольной постоянной распространения. Фиксируя один из параметров и варьируя другой, мы находим искомые значения последнего при произвольных значениях первого. Таким образом, уравнения (9) и (10) можно решать относительно двух переменных.

Искомые значения переменных является пересечении функции в левой части уравнений с нулем. Значит, для определения корней необходим алгоритм поиска пересечений функции с нулем. Но прежде, нужно понять, как вообще ведет себя исследуемая функция.

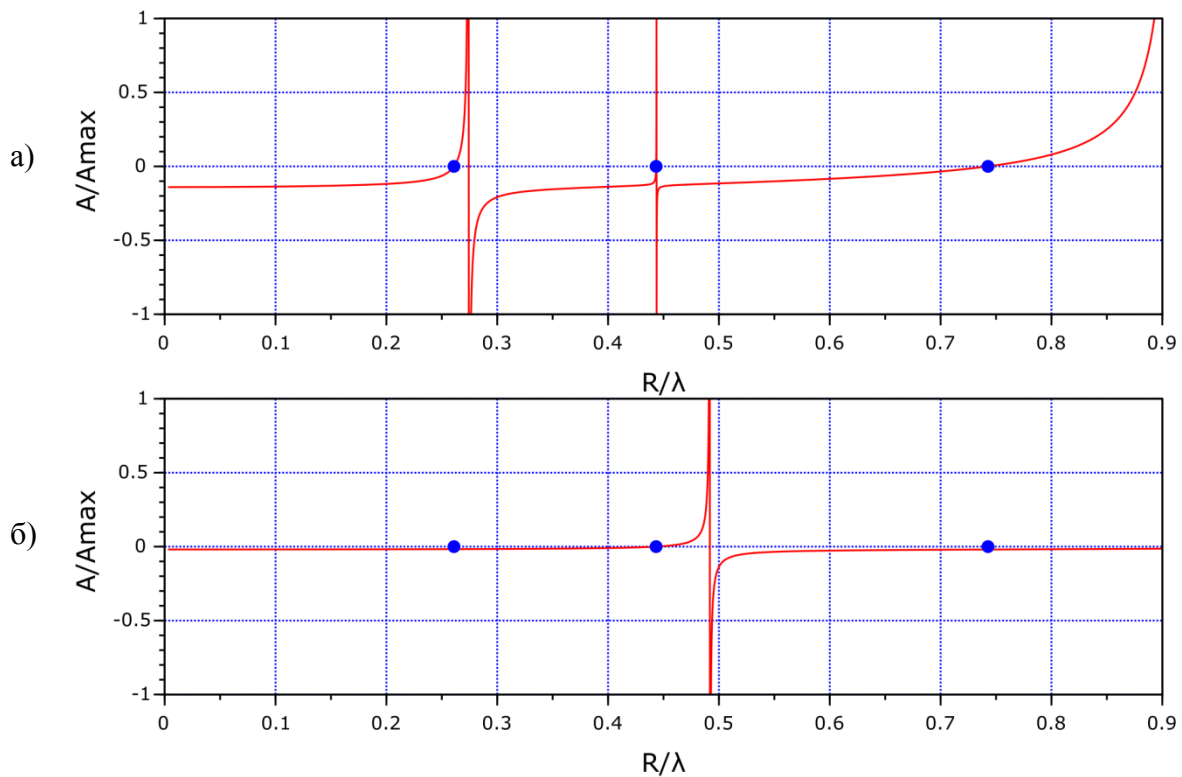
Так как возможно 2 пути решения поставленной задачи, нужно рассмотреть два вида исследуемой функции – 1) зависимость от частоты; 2) зависимость от постоянной распространения.

Для анализа рассмотрим фиксацию постоянной распространения и варьирование частоты. Была взята трехслойная структура в поперечном сечении, содержащая диэлектрический цилиндр с  $\epsilon=9$ . Графики, изображенные на рисунке 2 наглядно показывают исследуемую функцию. Точками изображены корни уравнений (9) и (10), то есть фактическое пересечение с нулем.

Исследуемая функция монотонно возрастает при любых азимутальных индексах и имеет разрывы. Информация о монотонном возрастании может пригодиться при создании алгоритмов, находящих корни искомых уравнений. При фиксированной частоте, с увеличением азимутального индекса функция усложняется и появляется все больше решений исходных уравнений, что ведет к ошибкам или увеличению времени расчета.

При недостаточно мелком разбиении по частоте можно наблюдать разрывы, амплитуда которых находится в пределах одной полуплоскости. При наличии таких разрывов не обнаруживается корень, который должен находиться между любыми двумя разрывами. Для решения этой проблемы был разработан алгоритм, определяющий такие разрывы и

восстанавливающий потерянный корень. Если же корень все равно не определяется, необходимо увеличить количество точек, на которые разбивается исследуемый частотный диапазон.



**Рисунок 2. Зависимость исследуемой функции от частоты при  $m=1$  а) для Н-волн б) для Е-волн.**

Для удобства вместо частоты на графиках указана величина  $R/\lambda$ , позволяющая оценивать характеристики вне зависимости от конкретных геометрических размеров волновода.

При одинаковой сложности вычислений, что при фиксированной частоте, что при фиксированной постоянной распространения, для программы был выбран последний способ в силу того, что при определении критических частот необходимо просканировать именно по частоте. И чтобы не использовать несколько специализированных алгоритмов по нахождению пересечения с нулем, проще использовать в качестве основной переменной частоту.

Написанный алгоритм методом сравнения двух точек определяет пересечение функции с нулем. Причем, если взято недостаточно точек по частоте, и теряются корни уравнения, алгоритм по невыполнению условия монотонного возрастания определяет точки, где должен находиться корень. Это позволяет использовать меньшее количество точек по оси частот для расчетов, а значит, это сохраняет нам время. Например, результаты этой части алгоритма можно увидеть на рисунке 2 б – первая точка слева.

Не рационально фиксировать значения продольной постоянной распространения и менять частоту во всем исследуемом диапазоне. Слишком много времени уходит на расчет участков, где априорно нет решения, что ведет к лишним затратам времени на вычисления, поэтому был реализован метод, рассчитывающий зависимость по кривой (а не на всем пространстве возможных переменных): до начала расчета мы имеем опорные



точки, где постоянная распространения равна нулю, далее берется следующее значение постоянной распространения и находится соответствующая ей частота, при этом поиск по частотам начинается с частоты, соответствующей начальной точке. Как только нашлось искомое значение частоты, поиск заканчивается. Таким образом, экономится вычислительный ресурс и, как следствие, экономится время вычислений.

Прежде всего, находятся критические частоты и записываются в память. Для поиска критических частот фиксируется значение продольной постоянной распространения, равное нулю. Записывается массив данных, представляющих зависимость функций левых частей условий поперечного резонанса, а точнее этот массив содержит амплитуды функции для каждой частоты. С помощью этого массива образуются два новых – первый содержит порядковые номера точек, где произошло пересечения нуля, второй, где произошел разрыв. Объединяя неповторяющиеся элементы в последних двух массивах, мы получаем массив, содержащий порядковые номера корней уравнения, то есть фактически мы и находим корни.

Далее, начиная с найденных частот, фиксируются значения продольной постоянной распространения, и меняется частота вплоть до первого найденного корня. Написанный алгоритм позволяет найти корень по двум точкам, таким образом, запоминая старое значение функции и вычисляя новое, ни одно значение функции не рассчитывается повторно, а, значит, экономится время.

## Выводы

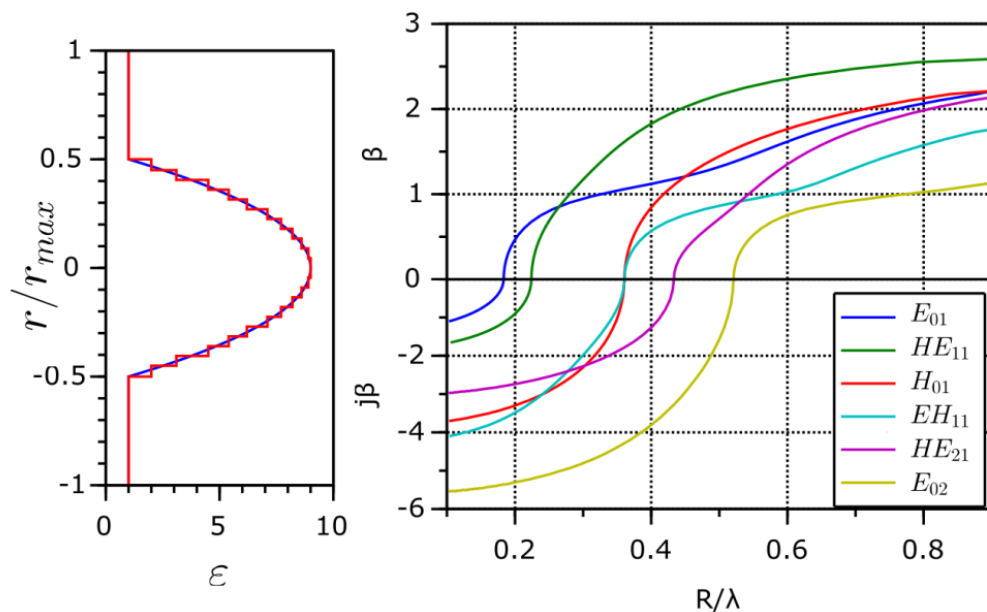
Для расчета и реализации математического аппарата был выбран пакет прикладных математических программ SciLab. Scilab — пакет прикладных [математических](#) программ, предоставляющий открытое окружение для инженерных (технических) и научных расчётов. Это самая полная общедоступная бесплатная альтернатива MATLAB.

Для решения поставленных задач были написаны программы и подпрограммы на встроенном языке программирования на основе математической модели, описанной ранее.

Программа содержит модули, выполняющие следующие функции: задание начальных условий, смена азимутального индекса, поиск критических частот, вычисление значений функции  $\beta_z(f)$  в области реактивно-затухающих волн, в области вещественных волн для  $H$ - и  $E$ -волн, вычисление параметров промежуточных слоев, вычисление функций, стоящих в левых частях условий поперечного резонанса, обработка собранных данных, построение графиков.

Для получения всех требуемых данных было написано несколько программ, отличающихся друг от друга только количеством слоев. Максимальное количество слоев – 12, для примера графики полученных зависимостей постоянных распространения от частоты представлены на рисунке 3.





**Рисунок 3. Частотные зависимости постоянной распространения для неоднородно заполненного круглого металлического волновода.**

Благодаря использованной математической модели и написанным алгоритмам теперь возможно исследовать поперечно неоднородные структуры цилиндрических линий передачи. При этом количество слоев исследуемой структуры теоретически неограниченно, следует отметить, что в среднем при увеличении количества слоев вдвое, время расчетов увеличивается даже меньше, чем в два раза, а зависимость времени расчета от количества слоев имеет линейный характер. Таким образом, разработанная математическая модель и алгоритмы её применения являются потенциально перспективными для дальнейшего исследования многослойных цилиндрических линий передачи.

### Список литературы

1. Мительман Ю.Е., Шабунин С.Н., Щипачев А.А. Преимущества и недостатки аналитических и численных методов расчета постоянных распространения волн в слоистых цилиндрических структурах // Сборник научных трудов международной заочной конференции, посвященной 15-летию со дня создания Регионального Уральского отделения Академии Инженерных Наук им. А.М. Прохорова. Екатеринбург: ИВТОБ, 2010. С. 121-124.
2. Мительман Ю.Е., Князев С.Т., Шабунин С.Н. Применение аппарата функций Грина слоистых структур к решению задач возбуждения, излучения и дифракции волн // Физика и технические приложения волновых процессов: тезисы докладов VII Международной научно-технической конференции, посвященной 150-летию со дня рождения А.С. Попова: Приложение к журналу «Физика волновых процессов и радиотехнические системы». Самара: «Самарское книжное издательство», 2008. С. 122-123.
3. Мительман Ю.Е. Расчет постоянных распространения многослойных цилиндрических направляющих систем // Одиннадцатая Всероссийская студенческая научно-техническая Интернет-конференция. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2007. <http://webconf.rtf.ustu.ru/mod/forum/discuss.php?d=3734>.

4. Yu. Mitelman, V. Oparin, S. Shabunin. Electromagnetic properties of the cylindrical magnetodielectric structures // Proc. Of the XI International Scientific-Research Conference "Radiolocation, Navigation, Communications". Russia, Voronezh: NPF "Sakvoee", 2005. P. 571-578.6.
5. S. Daylis, Yu. Mitelman, S. Shabunin. Waveguide and radiation properties of the cylindrical dielectric structures // Научные труды международной научно-практической конференции «Связь-пром 2005». Екатеринбург: ЗАО «Компания Реал-Медиа», 2005. С. 268-276.